

## Лекция 4.

### Основы формализма квантовой механики.

#### Нестационарное уравнение Шредингера.

Выше мы уже отмечали, что модели Бора и Бора – Зоммерфельда, являющиеся полуклассическими по своей сути, не могут описать особенности динамики атомных электронов. Более того, эти модели, в основе которых лежит движение электронов по некоторым разрешенным орбитам, противоречат нашим представлениям о необходимости вероятностного описания процессов в микромире атомно-молекулярных масштабов (см. Л\_2). Наша задача теперь – формализовать описание движения микрочастиц (в дальнейшем для определенности мы будем говорить об электронах) в пространстве, рассмотренное нами ранее на качественном уровне. Мы уже говорили о том, что частицу следует описывать с помощью некоторого волнового поля, причем это поле связано с вероятностью обнаружения микрообъекта в той или иной области пространства. В частности, частице с импульсом  $p$  (мы рассматриваем одномерный случай) соответствует волна

$$\psi(x, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(px - Et)\right) = \exp(i(kx - \omega t)). \quad (4.1)$$

Попробуем теперь угадать волновое уравнение, решением которого является плоская волна (4.1), причем связь  $\omega$  и  $k$  (дисперсионное соотношение) задается в виде:

$$E = p^2/2m \quad \text{или} \quad \hbar\omega = \frac{\hbar^2 k^2}{2m}. \quad (4.2)$$

Дифференцируя один раз  $\psi(x, t)$  по времени и дважды – по пространственной координате, получим

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = -i\omega\psi, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = -k^2\psi. \quad (4.3)$$

Сопоставляя теперь (4.3) с дисперсионным соотношением (4.2), мы понимаем, что искомое уравнение будет уравнением первого порядка по времени и - второго по пространственной координате. Действительно, умножая первое из соотношений (4.3) на  $i\hbar$ , получим

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hbar\omega\psi. \quad (4.4)$$

Аналогично, домножим второе из соотношений (4.3) на  $-\hbar^2/2m$ :

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \psi. \quad (4.5)$$

Сравнивая (4.4) и (4.5), получаем, что решение в виде плоской волны (4.1) с дисперсионным соотношением (4.2) удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}. \quad (4.6)$$

Уравнение (4.6) было получено Э. Шредингером<sup>1</sup> в 1926 году, носит его имя и описывает движение частицы в свободном пространстве.

Обобщение на трехмерный случай делается элементарно. Выражение для волны де Бройля запишем в виде

<sup>1</sup> E.Schrodinger (1887-1961) – австрийский физик – теоретик, Нобелевская премия (1933).

$$\psi(\vec{r}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)\right) = \exp(i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)), \quad (4.7)$$

причем

$$\hbar\omega = \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{2m} = \frac{\hbar^2}{2m}(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) \quad (4.8)$$

Здесь  $k_x, k_y, k_z$  - проекции волнового вектора на соответствующие оси координат.

Тогда, очевидно, нестационарное уравнение Шредингера имеет вид

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi. \quad (4.9)$$

Обобщим это уравнение на случай движения частицы в потенциальном поле  $V(\vec{r}, t)$ . Для этого вспомним, что в правой части уравнения (4.9) фактически стоит кинетическая энергия частицы (см. выражение (4.2)). При наличии потенциального поля ее следует заменить на полную энергию, т.е. добавить в (4.9) потенциальный член

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t). \quad (4.10)$$

Уравнение (4.10) есть нестационарное уравнение Шредингера, описывающее движение частицы в произвольном потенциальном поле<sup>2</sup>.

Как видно, уравнение Шредингера (4.10) является уравнением первого порядка по времени. Поэтому для его решения необходимо задать одно начальное условие, а именно, волновую функцию в некоторый начальный (например, нулевой) момент времени

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \psi_0(\vec{r}). \quad (4.11)$$

Тогда, зная волновую функцию системы в начальный момент времени, проинтегрировав (4.10), мы сможем определить волновую функцию в любой наперед заданный момент времени.

Нестационарное уравнение Шредингера есть основное уравнение квантовой механики и фактически приходит на смену классическим уравнениям Ньютона. Как мы уже отмечали, постановка задачи в классической механике (по начальным значениям координаты и скорости (или импульса) определить значения этих величин в любой наперед заданный момент времени) невозможна в квантовой теории. Соотношения неопределенностей Гейзенберга не позволяют в принципе задать начальные условия так, как это делается в классической теории. Состояние микрообъекта в квантовой теории описывается волновым полем,  $\psi$  - функцией. Вся информация, которую мы можем узнать о системе, содержится в ее волновой функции.

#### Релятивистское волновое уравнение.

Прежде чем перейти к обсуждению важнейшего вопроса теории о физическом смысле волновой функции и о том, как по известной волновой функции определять измеряемые в экспериментах параметры микрообъекта, попытаемся получить («угадать») релятивистское волновое уравнение. Как известно, в релятивистской теории пространственные координаты и время образуют единый четырехмерный вектор. Поэтому в релятивистское волновое уравнение производные по времени и по пространственным коор-

<sup>2</sup> Во избежание недоразумения отметим, что проведенные рассуждения ни в коей мере не являются «выводом» уравнения Шредингера, которое не может быть получено из каких-либо более общих физических законов. Это лишь некоторый способ «угадать» его.

динатам должны входить симметричным образом: например, уравнение может содержать производные второго (или первого) порядка и по времени и по координате.

Для релятивистской частицы связь энергии и импульса задается соотношением

$$E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4. \quad (4.12)$$

Поэтому дисперсионное соотношение  $\omega(k)$  для волны де Бройля записывается в виде

$$\omega^2 = k^2 c^2 + m^2 c^4 / \hbar^2. \quad (4.13)$$

Теперь легко угадывается волновое уравнение, допускающее решение в виде плоской волны (4.1) с зависимостью  $\omega(k)$  в виде (4.13):

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \psi. \quad (4.14)$$

Полученное уравнение называется уравнением Клейна<sup>3</sup> – Гордона<sup>4</sup> и было получено ими в 1926 году. В частном случае, если масса частицы равна нулю (фотон), уравнение (4.14) превращается в «обычное» волновое уравнение, описывающее, например, электромагнитное поле<sup>5</sup>. Мы не будем здесь обсуждать целый комплекс проблем, возникших с толкованием смысла уравнения Клейна – Гордона в квантовой теории. Отметим только, что оказывается возможным написать еще одно релятивистское волновое уравнение, содержащее только производные первого порядка по времени и по пространственной координате, такое, что его решением является плоская волна де Бройля (4.1), а связь  $\omega(k)$  задается с помощью (4.13). Соответствующее уравнение было получено Дираком в 1928 году и носит его имя.

#### Волновая функция и ее физический смысл.

Какой физический смысл следует придать введенной нами волновой функции? Мы уже обсуждали это вопрос (см. Л\_2) и пришли к выводу, что это поле  $\psi(\vec{r}, t)$  определяет вероятность обнаружить частицу в различных точках пространства в заданный момент времени. Точнее, квадрат модуля волновой функции  $|\psi(\vec{r}, t)|^2$  есть плотность вероятности обнаружить частицу в точке с координатой  $\vec{r}$  в момент времени  $t$ :

$$\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2. \quad (4.15)$$

Естественно полагать, что где-то в пространстве частица достоверно существует. Поэтому волновая функция должна удовлетворять следующему условию нормировки

$$\int_V |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3 r = 1. \quad (4.16)$$

Здесь интеграл берется по области определения волновой функции, как правило, это все бесконечное пространство. Таким образом, состояния частицы должны описываться функциями с интегрируемым квадратом модуля.

Здесь нас ожидает «неприятность». Единственная волновая функция, которую мы уже знаем, это волна де Бройля, соответствующая частице с заданным значением импульса. Поскольку для этой волны

$$|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \left| \exp \left( \frac{i}{\hbar} (\vec{p}\vec{r} - Et) \right) \right|^2 \equiv 1, \quad (4.17)$$

<sup>3</sup> О. Klein (1894 – 1977) – шведский физик – теоретик.

<sup>4</sup> W. Gordon (1893 – 1939) – немецкий физик – теоретик.

<sup>5</sup> Некоторое отличие есть и в этом случае: наше уравнение записано для одной скалярной функции, в теории электромагнитного поля аналогичное уравнение возникает для векторной функции, например, векторного потенциала.

то нормировочный интеграл, очевидно, расходится. С другой стороны, такая ситуация понятна. Если импульс известен точно (а для волны де Бройля это именно так), то из соотношения неопределенностей для неопределенности координаты получаем

$$\Delta x \sim \hbar / \Delta p_x \rightarrow \infty, \quad (4.18)$$

т.е. частица делокализована по всему бесконечному пространству. Именно такое абсолютно делокализованное состояние и задает плоская волна. Конечно, к реальному состоянию частицы плоская волна прямого отношения не имеет. Это математическая абстракция. Любой физический процесс происходит, может быть и в макроскопически большой, но ограниченной области пространства. Поэтому мы можем утверждать, что состояние частицы с точно определенным значением импульса принципиально невозможно, а волновая функция вида (4.1) или (4.7) не описывает никакого состояния реального физического объекта. С другой стороны, если волновой пакет достаточно широкий, т.е. его пространственный размер много больше длин волн де Бройля его образующих, приближение плоской волны часто оказывается очень удобным с математической точки зрения.

Таким образом, помимо функций с интегрируемым квадратом модуля в квантовой механике бывает удобно работать и с функциями, которые условию нормировки (4.16) не удовлетворяют. Рассмотрим вопрос о нормировке таких функций на примере состояния (4.1). Мы опять для простоты ограничимся одномерным случаем. Будем считать, что состояние в виде плоской волны

$$\psi_p(x) = A \exp\left(\frac{i}{\hbar} p x\right) \quad (4.19)$$

( $A = \sqrt{1/L}$  - нормировочная константа, индекс « $p$ » указывает, что это состояние с импульсом  $p$ ) задано на отрезке  $x \in (-L/2, L/2)$ . Мы полагаем, что  $L$  велико и в дальнейшем перейдем к пределу  $L \rightarrow \infty$ .

Рассмотрим значение следующего интеграла

$$I = \int_{-L/2}^{L/2} \psi_{p'}^*(x) \psi_p(x) dx \quad (4.20)$$

Вычисление интеграла (4.20) дает

$$I = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (p - p') x\right) dx = \frac{\sin \Delta k L / 2}{\Delta k L / 2}. \quad (4.21)$$

Здесь  $\Delta k = (p - p')/\hbar$ . При  $\Delta k \neq 0$  в пределе  $L \rightarrow \infty$  получаем, что  $I \rightarrow 0$ , т.е. волновые функции состояний с различными значениями импульса становятся ортогональны друг другу. В случае  $\Delta k \equiv 0$  получаем, что  $I = 1$  для любого конечного сколь угодно большого значения  $L$ , т.е. условие нормировки (4.16) оказывается выполненным. Указанная процедура может быть использована при решении конкретных задач, однако не совсем удобна, так как в исходной функции (4.19) появился нормировочный размер  $L$ . Поэтому обычно поступают немного иначе. Пусть нормировочная константа  $A = 1$ . Тогда вычисление интеграла (4.21) в пределе  $L \rightarrow \infty$  дает

$$I = \lim_{L \rightarrow \infty} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(\frac{i}{\hbar} (p - p') x\right) dx = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{\sin \Delta k L / 2}{\Delta k / 2} = 2\pi \hbar \delta(p - p').$$

Мы здесь использовали известные соотношения  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \pi \delta(x)$ ,  $\delta(ax) = \delta(x)/|a|$ .

Отсюда возникает условие нормировки на  $\delta$  - функцию:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_{p'}^*(x) \psi_p(x) dx = \delta(p - p'), \quad (4.22)$$

где

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right). \quad (4.23)$$

В трехмерном случае аналогично получаем

$$\int \psi_{p'}^*(\vec{r}) \psi_p(\vec{r}) d^3r = \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (4.24)$$

причем

$$\psi_p(\vec{r}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \vec{p}\vec{r}\right). \quad (4.25)$$

Условие нормировки на  $\delta$  - функцию используется в квантовой теории всякий раз, когда волновая функция не может быть нормирована согласно условию (4.16).

Уравнение непрерывности. Вектор плотности тока вероятности.

Получим теперь одно очень важное свойство, которому удовлетворяют волновые функции, являющиеся решениями нестационарного уравнения Шредингера в произвольном потенциальном поле. Запишем для этого еще раз уравнение Шредингера

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t), \quad (4.26)$$

а также уравнение, комплексно сопряженное ему:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi^*}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi^* + V(\vec{r}, t) \psi^*(\vec{r}, t). \quad (4.27)$$

Умножим (4.26) на  $\psi^*(\vec{r}, t)$ , (4.27) – на  $\psi(\vec{r}, t)$ , а затем вычтем одно из другого. Получим:

$$i\hbar \left( \psi^* \frac{\partial \psi}{\partial t} + \psi \frac{\partial \psi^*}{\partial t} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} (\psi^* \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \psi^*), \quad (4.28)$$

или

$$\frac{\partial |\psi(\vec{r}, t)|^2}{\partial t} = -\frac{\hbar}{2mi} \nabla \cdot (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (4.29)$$

Вспоминая, что  $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \rho(\vec{r}, t)$  - плотность вероятности, перепишем (4.29) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{j} = 0, \quad (4.30)$$

где введено обозначение

$$\vec{j} = \frac{\hbar}{2mi} (\psi^* \nabla \psi - \psi \nabla \psi^*). \quad (4.31)$$

Уравнение типа (4.30) хорошо известно в различных областях физики, в частности, в электродинамике и является математическим выражением закона сохранения электрического заряда, причем  $\rho$  есть плотность электрического заряда, а  $\vec{j}$  - плотность электрического тока. Уравнение (4.30) означает, что электрический заряд не исчезает и не появляется, а только перетекает из одной точки пространства в другую. Аналогичное уравнение в гидродинамике ( $\rho$  - плотность жидкости,  $\vec{j}$  - поток массы) означает закон сохранения массы. Поэтому по аналогии естественно в квантовой теории величину  $\vec{j}$  на-

звать вектором плотности тока вероятности. Полученное нами уравнение непрерывности (4.30) означает, что плотность вероятности в квантовой теории перетекает из одной пространственной точки в другую подобно заряду в электродинамике, или массе в гидродинамике.

Отметим, что полученные соотношения являются общими и не зависят от конкретного вида потенциального поля, в котором движется частица. Для нас было важным только требование, чтобы потенциальная функция  $V(\vec{r}, t)$  была вещественной. Легко показать, что введение в теорию комплексного потенциала может быть использовано для описания процесса рождения или гибели частицы, причем скорость рождения (гибели) будет определяться мнимой частью потенциала  $\text{Im}V(\vec{r}, t)$ .

Определение средних значений и дисперсии импульса и координаты частицы.

Итак, в квантовой механике волновая функция  $\psi(\vec{r}, t)$  определяет состояние системы. Однако сама волновая функция непосредственно не может быть измерена в эксперименте. Вместо нее экспериментатор измеряет такие величины, как координата, импульс, энергия, момент импульса и т.д. Как, зная волновую функцию системы, определить значения этих и других физических величин? Мы знаем уже, что результат измерения, вообще говоря, может оказаться различным. Поэтому фактически можно говорить о вычислении вероятности того или иного результата измерения, а также среднем значении физической величины в данном квантовом состоянии, описываемом функцией  $\psi(\vec{r}, t)$ .

Начнем обсуждение вопроса о вычислении квантовомеханических средних с определения среднего значения пространственной координаты частицы. В данном случае среднее значение можно определить исходя из вероятностного смысла волновой функции. Величина

$$dW(t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r \quad (4.32)$$

есть вероятность обнаружить частицу в момент времени  $t$  в элементе объема  $d^3r$  вблизи точки с координатой  $\vec{r}$ . Поэтому среднее по квантовому состоянию значение координаты частицы определяется по формуле

$$\langle \vec{r}(t) \rangle = \int \vec{r} |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = \int \psi^*(\vec{r}, t) \vec{r} \psi(\vec{r}, t) d^3r. \quad (4.33)$$

Здесь скобки  $\langle \rangle$  означают процедуру усреднения по квантовому состоянию системы. Выражение (4.33) легко расписать для каждой из проекций радиус-вектора  $x, y, z$ . Например, для  $x$  - проекции имеем

$$\langle x(t) \rangle = \int x |\psi(\vec{r}, t)|^2 d^3r = \int \psi^*(\vec{r}, t) x \psi(\vec{r}, t) d^3r \quad (4.34)$$

Отметим, что речь идет о принципиально новом способе усреднения, не имеющем аналога в классической теории. Действительно, в классической физике часто производится усреднение некоторой величины по времени. Еще один способ усреднения, типичный для задач с большим числом частиц, – вычисление среднего значения физической величины по ансамблю, например вычисление средней скорости движения молекул в газе. В нашем случае усреднение проводится по квантовому состоянию микрообъекта в фиксированный момент времени. Важно отметить, что определить экспериментально это среднее по квантовому состоянию значение координаты не так просто. Действительно, мы уже говорили о том, что в микромире процедура измерения влияет на протекание изучаемого физического процесса. Поэтому после измерения волновая функция системы оказывается уже иной. Эта ситуация на примере измерения  $x$  – координаты частицы

проиллюстрирована на рис.4.1. Сплошная кривая соответствует величине  $|\psi(x)|^2$  до измерения. Пусть в результате измерения мы обнаружили частицу где-то вблизи точки с координатой  $x_1$ . Новая волновая функция системы оказывается локализована около этой точки (штриховая кривая) и описывает уже совсем другое состояние частицы, которое возникло после измерения. Поэтому, если мы хотим определить среднее значение координаты в заданном состоянии, мы должны позаботиться о том, что каждый раз снова приготавливать это состояние после очередного измерения.

На практике обычно подразумевается, что имеется большое количество идентичных невзаимодействующих квантовых систем, например, сгусток из  $N$  электронов<sup>6</sup> ( $N \gg 1$ ).

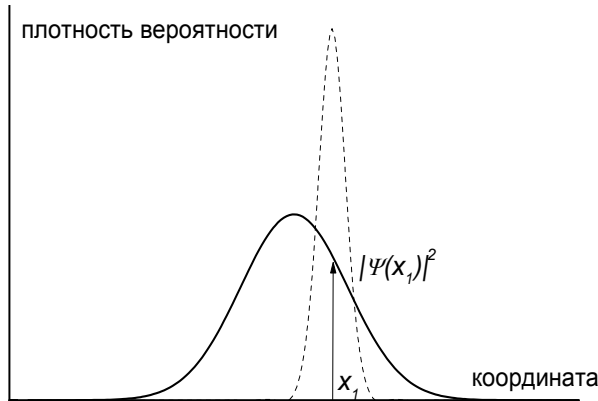


Рис.4.1. К вопросу об измерении координаты частицы.

Тогда при измерении координат каждого из них мы получаем распределение значений, определяемое квадратом модуля волновой функции, а по этому распределению в соответствии с выражением (4.33) или (4.34) определим среднее значение координаты электронного сгустка.

Аналогично тому, как это делается в теории вероятностей удобно ввести еще и дисперсию среднего значения координаты, характеризующую разброс измеряемых значений

относительно среднего значения. Определим дисперсию следующим образом

$$D_x = \langle (x - \langle x \rangle)^2 \rangle = \langle x^2 - 2x\langle x \rangle + \langle x \rangle^2 \rangle = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2. \quad (4.35)$$

Здесь символом  $\langle \rangle$  всюду также обозначена интегральная операция типа (4.34). Например

$$\langle x^2(t) \rangle = \int \psi^*(\vec{r}, t) x^2 \psi(\vec{r}, t) d^3r \quad (4.36)$$

- среднее значение квадрата координаты частицы. Таким образом, для вычисления дисперсии необходимо определить среднее от квадрата и квадрат от среднего, а затем вычесть одно из другого.

А как определять средние и дисперсии других физических величин, например, импульса? Прежде чем ответить на этот вопрос, вспомним, что мы уже знаем состояния, в которых импульс частицы точно определен. Это плоская волна де Бройля

$$\psi_p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right). \quad (4.37)$$

Рассмотрим теперь состояние, построенное в виде линейной суперпозиции состояний (4.37)

$$\psi(x) = \sum_i C_{p_i} \psi_{p_i}(x). \quad (4.38)$$

Какое значение импульса будет измерено в этом состоянии? Правильный ответ заключается в следующем, и это принципиально важно для дальнейшего понимания основ формализма квантовой механики. Будет измерено одно из значений  $p_i$ , соответствующее волновой функции, входящей в разложение (4.38), причем вероятность определения это-

<sup>6</sup> При этом принципиально важно, чтобы взаимодействие между электронами было пренебрежимо мало.

го значения определяется величиной квадрата модуля  $|C_{p_i}|^2$ , поэтому саму величину  $C_{p_i}$  часто называют амплитудой вероятности. Для экспериментального определения этих вероятностей надо приготовить совокупность идентичных невзаимодействующих квантовых систем, тогда измерение импульсов для всех систем как раз и позволит определить значения вероятностей  $|C_{p_i}|^2$ .

В общем случае, поскольку величина измеряемого импульса «пробегает» непрерывный набор значений, вместо (4.38) следует записать интегральное представление:

$$\psi(x) = \int C_p \psi_p dp. \quad (4.39)$$

Повторим еще раз: данное представление волновой функции есть ее разложение по состояниям с точно определенным значением импульса. При этом величина  $|C_p|^2$  есть плотность вероятности того, что при измерении у частицы будет обнаружено значение импульса, равное  $p$ , а  $|C_p|^2 dp$  есть вероятность измерить значение импульса в интервале от  $p$  до  $p + dp$ .

С математической точки зрения представление (4.39) есть разложение функции  $\psi(x)$  в интеграл Фурье. Поэтому величина  $C_p$  может быть найдена с помощью обратного преобразования Фурье:

$$C_p = \int \psi(x) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} px\right) \frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}} = \int \psi(x) \psi_p^*(x) dx. \quad (4.40)$$

Теперь легко определить среднее значение импульса в состоянии, описываемом функцией  $\psi(x)$ . Поскольку  $|C_p|^2$  есть плотность вероятности импульсного распределения, то по аналогии с определением  $\langle x \rangle$  запишем

$$\langle p \rangle = \int p |C_p|^2 dp. \quad (4.41)$$

Казалось, нам предстоит достаточно трудоемкая процедура. По волновой функции  $\psi(x)$  надо определить  $C_p$ , а уже затем вычислить интеграл (4.41). Однако, покажем, что процедуру можно существенно упростить. Перепишем (4.41) в виде

$$\langle p \rangle = \iint dp dp' p C_p^* C_p \delta(p - p'), \quad (4.42)$$

а затем воспользуемся интегральным представлением для  $\delta$ -функции

$$\delta(p - p') = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \exp\left(\frac{i}{\hbar} (p - p')x\right) dx. \quad (4.43)$$

Подставляя (4.43) в (4.42) и, затем, меняя местами порядок интегрирования, получим

$$\langle p \rangle = \int dx \int C_p^* \exp\left(-\frac{i}{\hbar} p' x\right) \frac{dp'}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int C_p p \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right) \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}}. \quad (4.44)$$

Очевидно, что первый вложенный в (4.44) интеграл есть просто  $\psi^*(x)$ . Второй интеграл легко сводится к производной от волновой функции

$$\int C_p p \exp\left(\frac{i}{\hbar} px\right) \frac{dp}{\sqrt{2\pi\hbar}} = -i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (4.45)$$

Поэтому окончательно для  $\langle p \rangle$  получаем

$$\langle p \rangle = \int \psi^*(x) (\hat{p} \psi(x)) dx, \quad (4.46)$$



где введено обозначение

$$\hat{p} = -i\hbar \partial / \partial x. \quad (4.47)$$

Аналогично для дисперсии значения импульса можно записать

$$D_p = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2, \quad (4.48)$$

где квадрат среднего значения импульса определяется выражением

$$\langle p^2 \rangle = \int p^2 |C_p|^2 dp = \int \psi^*(x) \left( -\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \right) dx = \int \psi^*(x) \hat{p}^2 \psi(x) dx. \quad (4.49)$$

Ниже выражения для средних, аналогичные (4.34), (4.46), будут получены и для других измеряемых физических величин.

### Операторы.

Итак, полученные в предыдущем разделе выражения для средних значений координаты и импульса можно записать единым образом, если ввести операторы координаты  $\hat{x}$  и импульса  $\hat{p}_x$ :

$$\hat{x}\psi(\vec{r}, t) = x\psi(\vec{r}, t), \quad (4.50)$$

$$\hat{p}_x\psi(\vec{r}, t) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x} \psi(\vec{r}, t), \quad (4.51)$$

т.е. оператор  $x$  - проекции координаты есть просто умножение на величину  $x$ , а оператор импульса есть (с точностью до постоянного множителя  $-i\hbar$ ) оператор дифференцирования по координате. Аналогичные соотношения можно записать и для двух других проекций. Поэтому в общем случае для оператора импульса можно записать

$$\hat{\vec{p}} = -i\hbar \nabla. \quad (4.52)$$

А теперь сделаем важное обобщение. Каждой физической величине, введенной в классической механике, в квантовой механике ставится в соответствие оператор этой величины. При этом соотношение между величинами в классической механике в квантовой механике переносится на операторы. Например, оператор кинетической энергии есть

$$\hat{T} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = \frac{\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \hat{p}_z^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2, \quad (4.53)$$

оператор потенциальной энергии  $\hat{V}(\vec{r}, t)$  есть также оператор умножения на потенциальную функцию  $V(\vec{r}, t)$ <sup>7</sup>:

$$\hat{V}\psi(\vec{r}, t) = V(\vec{r}, t)\psi(\vec{r}, t).$$

Важную роль в квантовой механике играет оператор полной энергии. Его также называют оператором Гамильтона или гамильтонианом

$$\hat{H} = \hat{T} + \hat{V} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + V(\vec{r}, t). \quad (4.54)$$

Введенный нами оператор Гамильтона позволяет записать нестационарное уравнение Шредингера (4.10) в более компактном виде

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (4.55)$$

<sup>7</sup> Для того, чтобы это увидеть, достаточно разложить потенциальную функцию  $V(\vec{r}, t)$  в ряд Тейлора и вспомнить свойства оператора координаты.

Построим еще оператор момента количества движения. Поскольку в классической механике  $\vec{L} = [\vec{r} \times \vec{p}]$ , то для операторов имеем

$$\hat{\vec{L}} = -i\hbar[\vec{r} \times \nabla]. \quad (4.56)$$

Распишем последнее определение отдельно для каждой из компонент:

$$\begin{aligned} \hat{L}_x &= -i\hbar(y \partial/\partial z - z \partial/\partial y), \\ \hat{L}_y &= -i\hbar(z \partial/\partial x - x \partial/\partial z), \\ \hat{L}_z &= -i\hbar(x \partial/\partial y - y \partial/\partial x). \end{aligned} \quad (4.57)$$

Для нас будет важен еще оператор квадрата момента количества движения

$$\hat{L}^2 = \hat{L}_x^2 + \hat{L}_y^2 + \hat{L}_z^2. \quad (4.58)$$

В ряде задач нам будет удобно использовать сферическую систему координат. Поэтому приведем выражения для некоторых из введенных нами операторов в сферической системе координат. Напомним, что в этой системе вместо тройки чисел  $x, y, z$ , задающих декартовы координаты,

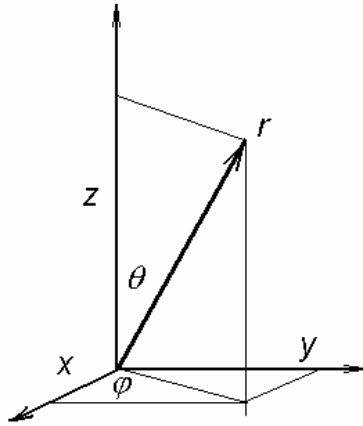


Рис.4.2. Сферическая система координат.

используются модуль радиус-вектора  $r$  и два угла  $\theta$  и  $\varphi$  (см. рис.4.2). Здесь мы приведем выражения для оператора Лапласа

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{1}{r^2} \Delta_{\theta\varphi}, \quad \text{где} \quad \Delta_{\theta\varphi} = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$

- угловая часть оператора Лапласа, а также для операторов  $z$  – проекции момента количества движения и квадрата момента количества движения

$$\hat{L}_z = -i\hbar \partial/\partial \varphi, \quad \hat{L}^2 = -\hbar^2 \Delta_{\theta\varphi}.$$

Теперь у нас есть универсальный рецепт вычисления средних значений. Если некоторой физической величине  $A$  поставлен в соответствие оператор  $\hat{A}$ , то среднее значение физической величины  $A$  в некотором квантовом состоянии, описываемом функцией  $\psi(\vec{r}, t)$ , можно определить по формуле

$$\langle A(t) \rangle = \int \psi^*(\vec{r}, t) \hat{A} \psi(\vec{r}, t) d^3 r, \quad (4.59)$$

Дисперсию величины  $A$ , характеризующую разброс результатов возможных измерений относительно среднего значения, можно вычислить как

$$D_A = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2. \quad (4.60)$$

Все операторы, введенные нами, являются линейными операторами, действующими в пространстве функций с интегрируемым квадратом  $L_2$ . Напомним, что свойство линейности означает, что

$$\hat{A}(c_1 \psi_1 + c_2 \psi_2) = c_1 \hat{A} \psi_1 + c_2 \hat{A} \psi_2, \quad (4.61)$$

где  $c_1$  и  $c_2$  - некоторые числа, а  $\psi_1$  и  $\psi_2$  - функции, принадлежащие  $L_2$ .

Можно ли найти состояния  $\psi$ , в которых некоторая физическая величина  $A$  принимает точно определенное значение? Да, можно. Оказывается, что для этого необходимо, чтобы волновая функция  $\psi$  была собственной функцией оператора  $\hat{A}$ , т.е.

$$\hat{A} \psi_a = a \psi_a, \quad (4.62)$$

где  $a$  - собственное значение, соответствующее функции  $\psi_a$ . Действительно, определим среднее значение

$$\langle A \rangle = \int \psi_a^* \hat{A} \psi_a d\tau = a \int \psi_a^* \psi_a d\tau = a, \quad (4.63)$$

т.е. среднее значение величины совпадает с собственным значением оператора. Поскольку в рассматриваемом случае  $\langle A^2 \rangle = a^2$ , то дисперсия величины  $A$  в собственном состоянии оказывается равна нулю, т.е. физическая величина имеет точно определенное значение, равное собственному значению оператора  $\hat{A}$ .

Собственные значения всех операторов физических величин должны принимать только действительные значения. Можно показать, что из этого требования следует свойство эрмитовости операторов физических величин (более подробно - см. Приложение 1). Неэрмитовы операторы тоже используются в квантовой механике, однако таким операторам не могут быть поставлены в соответствие измеряемые физические величины.

Таким образом, в квантовой теории важное значение приобретает задача на собственные значения и собственные функции операторов различных физических величин. Набор собственных значений образует спектр оператора, который может быть как дискретным, так и непрерывным. Соответствующий набор собственных функций образует полную систему, то есть произвольное состояние системы  $\psi$  может быть представлено в виде разложения в ряд по собственным функциям какого-либо оператора  $\hat{A}$

$$\psi = \sum_n C_n \psi_n, \quad (4.64)$$

причем это разложение однозначно и единственно. Набор функций  $\{\psi_n\}$  всегда может быть выбран ортонормированным:

$$\int \psi_m^* \psi_n d\tau = \delta_{mn}, \quad \text{где} \quad \delta_{mn} = \begin{cases} 0, & m \neq n, \\ 1, & m = n. \end{cases} \quad (4.65)$$

В (4.65) интегрирование ведется по всей области определения волновой функции системы. Разложение (4.64) и условие ортонормированности (4.65) записаны для случая оператора  $\hat{A}$  с дискретным спектром. В случае непрерывного спектра следует записать

$$\psi = \int C_a \psi_a da, \quad (4.66)$$

$$\int \psi_a^* \psi_{a'} d\tau = \delta(a - a'). \quad (4.67)$$

Прежде чем рассмотреть несколько конкретных примеров задач на собственные значения и собственные функции для операторов физических величин, остановимся еще на физическом смысле разложения (4.64). Величина  $w_n = |C_n|^2$  есть вероятность того, что при измерении физической величины, соответствующей оператору  $\hat{A}$ , будет измерено значение  $A_n$ , соответствующее собственной функции  $\psi_n$ . Аналогично, если речь идет о физической величине, спектр оператора которой является непрерывным, величину  $dw = |C_a|^2 da$  следует трактовать, как вероятность при измерении величины  $A$ , обнаружить ее значение в интервале  $(a, a + da)$ .

Сами коэффициенты разложения  $C_n$  или  $C_a$  (их часто называют амплитудами вероятности) легко определить по известной волновой функции. Умножая (4.64) на  $\psi_m^*$  и интегрируя по всей области определения функции с учетом (4.65) найдем

$$C_n = \int \psi \psi_n^* d\tau. \quad (4.68)$$

Аналогично в случае непрерывного спектра имеем

$$C_a = \int \psi \psi_a^* d\tau. \quad (4.69)$$

Собственные значения и собственные функции оператора импульса.

Рассмотрим задачу

$$\hat{p}_x \psi_p = p \psi_p. \quad (4.70)$$

Здесь индекс « $p$ » указывает на принадлежность функции  $\psi_p$  собственному значению равному  $p$ . Используя явное выражение для  $x$  - проекции оператора импульса (4.51), получим

$$\psi_p = \exp\left(\frac{i}{\hbar} p x\right), \quad (4.71)$$

т.е. плоскую волну де Бройля. Таким образом, собственное состояние оператора импульса есть волна де Бройля. В этом нет ничего удивительного – в соответствии с гипотезой де Бройля (а мы использовали эту гипотезу для определения оператора импульса) волна (4.71) и есть состояние с точно определенным значением импульса. Отметим, что оператор импульса есть пример оператора с непрерывным спектром, а условие нормировки (4.23) тождественно условию (4.67).

Собственные значения и собственные функции оператора  $z$ - проекции момента количества движения.

Рассмотрим еще одну задачу:

$$\hat{L}_z \psi_{L_z} = L_z \psi_{L_z}, \quad (4.72)$$

или в сферической системе координат

$$-i\hbar \partial \psi_{L_z} / \partial \varphi = L_z \psi_{L_z}. \quad (4.73)$$

Интегрируя (4.73), находим

$$\psi_{L_z} = \exp\left(\frac{i}{\hbar} L_z \varphi\right). \quad (4.74)$$

Все выглядит очень похожим на решение задачи на собственные значения и собственные функции для оператора импульса. Однако есть одно существенное отличие. В рассматриваемом нами сейчас случае существует дополнительное условие – условие периодичности волновой функции, как функции полярного угла. Действительно при изменении угла  $\varphi$  на  $2\pi$  волновая функция не должна измениться, то есть

$$\psi_{L_z}(\varphi) = \psi_{L_z}(\varphi + 2\pi). \quad (4.75)$$

Из (4.75) находим

$$\exp\left(\frac{i}{\hbar} L_z \cdot 2\pi\right) = 1. \quad (4.76)$$

Очевидно, равенство (4.76) справедливо при строго определенных значениях  $L_z$

$$L_z = m\hbar, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.77)$$

Мы получили, что оператор  $z$  - проекции момента количества движения имеет чисто дискретный спектр, возможные значения  $L_z$  оказываются кратными постоянной Планка, а квантовое число  $m$  (его называют магнитным квантовым числом) как раз и определяет

величину проекции момента. Теперь, с учетом условия нормировки, мы можем записать нормированные собственные функции оператора  $\hat{L}_z$ :

$$\psi_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(im\varphi), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.78)$$

Стационарное уравнение Шредингера.

Рассмотрим теперь задачу на собственные значения и собственные функции оператора Гамильтона (мы полагаем, что потенциальное поле является стационарным):

$$\hat{H}\psi = E\psi, \quad (4.79)$$

или

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \psi + V(\vec{r})\psi = E\psi. \quad (4.80)$$

Эта задача оказывается самой важной среди задач на собственные значения и собственные функции операторов физических величин и имеет отдельное название – стационарное уравнение Шредингера. Эта задача чрезвычайно разнообразна: в зависимости от конкретного вида потенциала, входящего в гамильтониан, спектр может дискретным или непрерывным, может быть и так, что есть и дискретные уровни энергии, и континуум одновременно. Структура энергетического спектра также может быть чрезвычайно различной. Ниже мы познакомимся с решениями задачи (4.79) для ряда квантовых систем.

Знание набора собственных состояний оператора Гамильтона оказывается исключительно полезным для решения нестационарного уравнения

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi. \quad (4.81)$$

Пусть, в начальный (нулевой) момент времени система находится в некотором состоянии  $\phi(\vec{r})$ :

$$\psi(\vec{r}, t = 0) = \phi(\vec{r}). \quad (4.82)$$

Будем искать решение временной задачи (4.81) в виде разложения в ряд по собственным функциям  $\{\psi_n(\vec{r})\}$  оператора Гамильтона<sup>8</sup>:

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n C_n \psi_n(\vec{r}) T_n(t). \quad (4.83)$$

Здесь  $C_n$  - некоторые постоянные коэффициенты разложения. Подставляя разложение (4.83) в уравнение (4.81), получим:

$$\sum_n C_n \left( i\hbar \frac{dT_n}{dt} \psi_n - \hat{H} \psi_n T_n \right) = 0, \quad (4.84)$$

Учитывая теперь, что  $\psi_n$  есть собственные состояния оператора Гамильтона с собственным значением  $E_n$ , перепишем (4.84) в виде

$$\sum_n C_n \left( i\hbar \frac{dT_n}{dt} - E_n T_n \right) \psi_n(\vec{r}) = 0. \quad (4.85)$$

Очевидно, это равенство возможно, если выражение, стоящее в скобках равно нулю. Тогда получаем

<sup>8</sup> Такое разложение всегда возможно и является единственным вследствие полноты указанного набора.

$$T_n(t) = T_n(t=0) \cdot \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right). \quad (4.86)$$

Коэффициенты разложения  $C_n$  определим по волновой функции начального состояния. Для нулевого момента времени из (4.83) имеем

$$\phi(\vec{r}) = \sum_n C_n \psi_n(\vec{r}), \quad (4.87)$$

откуда находим

$$C_n = \int \psi_n^*(\vec{r}) \phi(\vec{r}) d^3 r, \quad (4.88)$$

причем  $T_n(t=0) = 1$ . Поэтому в окончательном виде решение нестационарного уравнения (4.81) с начальным условием (4.82) записывается в виде

$$\psi(\vec{r}, t) = \sum_n C_n \psi_n(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right). \quad (4.89)$$

Таким образом, знание базиса собственных функций оператора Гамильтона действительно легко позволяет получить аналитическое решение начальной задачи.

Рассмотрим теперь важный частный случай. Пусть в начальный момент времени система находится в одном из собственных состояний гамильтониана  $\psi_n$ . Тогда, очевидно, общее решение нестационарного уравнения (4.81) запишется в виде

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi_n(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} E_n t\right). \quad (4.90)$$

Выражение (4.90) описывает эволюцию собственного состояния оператора Гамильтона во времени. Отметим, что в рассматриваемом случае  $\rho(\vec{r}, t) = |\psi(\vec{r}, t)|^2 = |\psi_n(\vec{r})|^2$  и не зависит от времени. Поэтому собственные состояния оператора Гамильтона называют стационарными состояниями. В таких состояниях плотность вероятности обнаружить частицу в различных точках пространства не меняется со временем. Не меняются во времени и средние значения физических величин, рассчитанные по (4.59)<sup>9</sup>. В дальнейшем, работая с функциями  $\psi_n(\vec{r})$ , будем помнить, что это пространственные части волновых функций стационарных состояний системы. Полные волновые функции стационарных состояний содержат еще и временную часть и определяются с помощью (4.90).

### Коммутатор.

Выше уже обсуждалось, что физическая величина имеет точно определенное значение, если соответствующее состояние является собственным состоянием оператора этой физической величины. Может ли так быть, чтобы сразу две физических величины могут быть измерены точно в одном и том же состоянии?

Прежде чем ответить на этот вопрос, введем новое понятие коммутатора двух операторов  $\hat{A}$  и  $\hat{B}$ . Определим коммутатор  $[\hat{A}, \hat{B}]$  следующим образом

$$[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}. \quad (4.91)$$

Если коммутатор  $[\hat{A}, \hat{B}]$  равен нулю, то говорят, что операторы коммутируют. В противном случае операторы некоммутативны.

Рассмотрим несколько примеров. Займемся вычислением коммутатора операторов  $x$  - проекций импульса и координаты  $[\hat{x}, \hat{p}_x]$ . Для этого подействуем коммутатором

---

<sup>9</sup> При этом конечно мы полагаем, что оператор физической величины  $\hat{A}$  не зависит от времени.

(это новый оператор, действующий в пространстве  $L_2$ ) на некоторую волновую функцию  $\psi(x, y, z)$ . Получим:

$$[\hat{x}, \hat{p}_x]\psi(x, y, z) = -i\hbar \left( x \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}(x\psi) \right) = i\hbar \psi(x, y, z). \quad (4.92)$$

В результате имеем  $[\hat{x}, \hat{p}_x] = i\hbar$ , т.е. операторы не коммутируют. С другой стороны, поскольку  $x$ ,  $y$  и  $z$  - независимые переменные, легко показать, что коммутатор операторов различных проекции импульса и координаты равен нулю. Например,  $[\hat{x}, \hat{p}_y] = 0$  и т.п.

Сформулируем теперь важную теорему (без доказательства). *Два оператора имеют совпадающие наборы собственных функций в том и только том случае, если они коммутируют.* Это означает, что если коммутатор двух операторов отличен от нуля, то физические величины, им соответствующие, не могут быть точно измерены одновременно. И, наоборот, если коммутатор равен нулю, можно найти общие собственные функции двух операторов, а, следовательно, существуют состояния, в которых две физических величины могут быть измерены точно одновременно. Например, как мы уже видели, операторы одной и той же проекции импульса и координаты не коммутируют между собой. Это означает, что не существует таких состояний, в которых соответствующие величины заданы точно одновременно. Это утверждение нам знакомо. Ранее мы его получили из соотношения неопределенностей. С другой стороны, можно найти такие состояния, в которых, например,  $x$  - проекция импульса и  $y$  - координата могут быть определены точно.

Для нас сейчас важно, что правила коммутации операторов позволяют безошибочно предсказывать результат даже когда собственные функции операторов неизвестны. В качестве еще одного примера использования сформулированной теоремы рассмотрим серию коммутаторов различных компонент проекций момента количества движения<sup>10</sup>.

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, \quad [\hat{L}_y, \hat{L}_z] = i\hbar \hat{L}_x, \quad [\hat{L}_z, \hat{L}_x] = i\hbar \hat{L}_y. \quad (4.93)$$

То есть все три проекции момента количества движения попарно не коммутируют между собой. С другой стороны, можно показать, что квадрат момента количества движения коммутирует с каждой из проекций:

$$[\hat{L}^2, \hat{L}_i] = 0, \quad \text{где } i = x, y, z \quad (4.94)$$

Правила коммутации (4.93), (4.94) в значительной мере определяют специфические черты момента количества движения в квантовой механике. Мы можем найти состояния с точно определенными значениями квадрата момента и одной из его проекций (например, на ось  $z$ ). Две другие проекции момента оказываются в таком состоянии точно не определены, и мы можем говорить лишь о вероятности измерения того или иного значения этих проекций.

### Задачи.

- 4.1. Волновая функция частицы в некоторый момент времени определяется выражением

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{x^2}{a^2}\right).$$

<sup>10</sup> Соответствующие коммутаторы легко вычисляются в декартовой системе координат.

Определить средние значения и дисперсии координаты и импульса частицы в этом состоянии.

- 4.2. Решить предыдущую задачу для состояния частицы, описываемого волновой

$$\text{функцией } \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \cdot \exp(ik_0x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right).$$

- 4.3. В основном состоянии атома водорода волновая функция имеет вид  $\psi(r) = A \exp(-r/a_0)$ ,  $r$  - удаление электрона от притягивающего центра,  $a_0$  - Боровский радиус,  $A$  - нормировочная константа. Определить средние значения кинетической и потенциальной энергии электрона.

- 4.4. Определить собственные значения и собственные функции оператора кинетической энергии  $\hat{T}_x = \hat{p}_x^2/2m$ .

- 4.5. Показать, что гауссов волновой пакет минимизирует соотношение неопределенностей.

- 4.6. Может ли так быть, что в одном и том же состоянии импульс и полная энергия имеют точно определенные значения?

- 4.7. Доказать справедливость следующих коммутационных соотношений для оператора момента количества движения

$$[\hat{L}_x, \hat{L}_y] = i\hbar \hat{L}_z, \quad [\hat{L}^2, \hat{L}_z] = 0.$$

- 4.8. Доказать, что в центрально симметричном потенциале можно найти стационарные состояния, которые характеризуются точно определенными значениями квадрата и  $z$ - проекции момента количества движения.

- 4.9. Состояние частицы определяется волновой функцией

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{a\sqrt{\pi}}} \cdot \exp(ik_0x) \cdot \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x-x_0)^2}{a^2}\right).$$

Определить плотность вероятности распределения импульса  $W(p)$ .

- 4.10. Волновая функция системы как функция полярного угла  $\varphi$  задается выражением ( $A$  - нормировочная константа):

а)  $\psi(\varphi) = A \cos \varphi$ ,

б)  $\psi(\varphi) = A \sin^2 \varphi$ ,

в)  $\psi(\varphi) = A(1 + \sin(\varphi) \cos(\varphi))$ ,

Какие значения  $z$ - проекции момента количества движения и с какой вероятностью могут быть измерены в этом состоянии? Каковы среднее значение и дисперсия величины  $L_z$ ?

- 4.11. Волновая функция некоторой системы в сферических координатах определяется выражением:

а)  $\psi(r, \theta, \varphi) = R(r, \theta) \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{\pi}}$ ,

б)  $\psi(\vec{r}) = R(r) \sin(2\theta) \cos(\varphi)$ ,

в)  $\psi(\vec{r}) = R(r) \cos(\theta)(1 + \sin(\theta) \sin(\varphi))$ ,

Какие значения  $z$ - проекции момента количества движения и с какой вероятностью могут быть измерены в этом состоянии? Каковы среднее значение и дисперсия величины  $L_z$ ?